

(1)  $n \geq 4$  なる  $n$  に対して,  $f(n) \leq 2,000n^{1.5}$  が成り立つことを示せば, オーダ関数の定義に従って,  $O(n^{1.5})$  であることが分かる.

これは,  $n \geq 0$  なる  $n$  に対して,  $f(n) = 10n^{1.5} + 1,000n \log_2 n \leq 1,000n(n^{0.5} + \log_2 n)$  であり,  $n \geq 4$  なる  $n$  に対して,  $n^{0.5} + \log_2 n \leq 2n^{0.5}$  であることから, 直ちに分かる.

$n^{0.5} + \log_2 n \leq 2n^{0.5}$  であることは,  $g(n) = n^{0.5} - \log_2 n$  が  $n \geq \left(\frac{2}{\log_e 2}\right)^2$  において単調増加することを,  $g(n)$  を  $n$  で微分して確かめればよい.

(2)  $n \geq 3$  なる  $n$  に対して,  $f(n) \leq \log_2 n^4 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^{2.5}} + \frac{9}{n^3}\right) \leq \log_2 n^4$  が成り立つから,  $f(n) \leq \log_2 n^4 \leq \frac{4}{\log_e 2} \log_e n$  より, オーダ関数の定義に従って,  $O(\log n)$  である.

(3)  $n \geq 2^{100}$  なる  $n$  に対して,  $f(n) = n^{\log_2 n} + 1,000n^{100} \leq 1,001n^{\log_2 n}$  が成り立つから,  $O(n^{\log_2 n})$  である.

(4)  $n \geq n_0$  なる  $n$  に対して,  $f(n) \leq C3^n$  となるような定数  $n_0, C > 0$  が存在するかを考える. 今,  $\frac{n^5 2^n + 3^n}{3^n} = n^5 \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$  であり,  $n^5 \left(\frac{2}{3}\right)^n$  は  $\frac{5}{\log_e(3/2)} \leq n$  なる  $n$  に対して単調に減少するから,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^5 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$  である. 従って, 十分大きな  $n$  に対して,  $\frac{n^5 2^n + 3^n}{3^n} \leq C$  を満たす定数  $C$  は存在し,  $O(3^n)$  であることが分かる.

あるいは,  $n^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^n$  なる  $n_0$  より大きな  $n$  に対して  $n^5 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$  が成り立つことを示し, そのような  $n$  に対して,  $f(n) = n^5 2^n + 3^n \leq 2 \cdot 3^n$  であることを用いて証明してもよい.