電子計測　第8回目　講義資料

杉本　泰博

誤差について

1． 真値・・・ T ,　　$M-T=\varepsilon$ 誤差 (error)

測定値・・・ M　　$T-M= c$ 補正 (correction)

ε/T を 相対誤差という。

2． $T_1=M_1-\varepsilon_1$, $T_2=M_2-\varepsilon_2$ とすると、

加減算： $T_1 \pm T_2=(M_1 \pm M_2)-(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$

但し$\varepsilon_1,\varepsilon_2$の符号は正か負か全くわからない。総合誤差を考えるにあたっては常に、$|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|=\varepsilon$ として見積る。

乗算： $T1 \cdot T2=M1 \cdot M2-(\varepsilon 1 \cdot M2+\varepsilon 2 \cdot M1)$

全体の測定値：$M1 \cdot M2=M$ ，全体の誤差：$|\varepsilon 1| \cdot M2+|\varepsilon 2| \cdot M1=\varepsilon$

除算： $T1/T2=M1/M2-(M1/M2)(\varepsilon 1/M1-\varepsilon 2/M1)$

全体の測定値：$M1/M2=M$,

全体の誤差：$(M1/M2)(|\varepsilon 1|/M1+|\varepsilon 2|/M2)=\varepsilon$

相対誤差

測定すべき量Kが直接測定される量 a,b,c,…**などの関数として**

$K = f(a, b, c, ...)$ **と表される時（間接測定とよぶ。）、**

$a, b, c, ...$の誤差を$\Delta a, \Delta b, \Delta c, ...$とする。**測定値K′は、**

$$K' = f(a + \Delta a, b + \Delta b, c + \Delta c, ...)$$

Kに対する誤差ΔKは、

$$\begin{aligned}\Delta K = K'(\text{測定値}) - K &= f(a + \Delta a, b + \Delta b, c + \Delta c, ...) - f(a, b, c, ...)\\ &= \frac{\partial f}{\partial a}\cdot \Delta a + \frac{\partial f}{\partial b}\cdot \Delta b + \frac{\partial f}{\partial c}\cdot \Delta c + ...\end{aligned}$$

$\Delta a, \Delta b, \Delta c, ...$などは十分小さいとして、

$$\text{相対誤差}\quad \left|\frac{\Delta K}{K}\right| \le \left|\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial a}\cdot \Delta a\right| + \left|\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial b}\cdot \Delta b\right| + \left|\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial c}\cdot \Delta c\right| + ...$$

尚、$\Delta a, \Delta b, \Delta c, ...$などは最大の誤差の場合を考えてある。

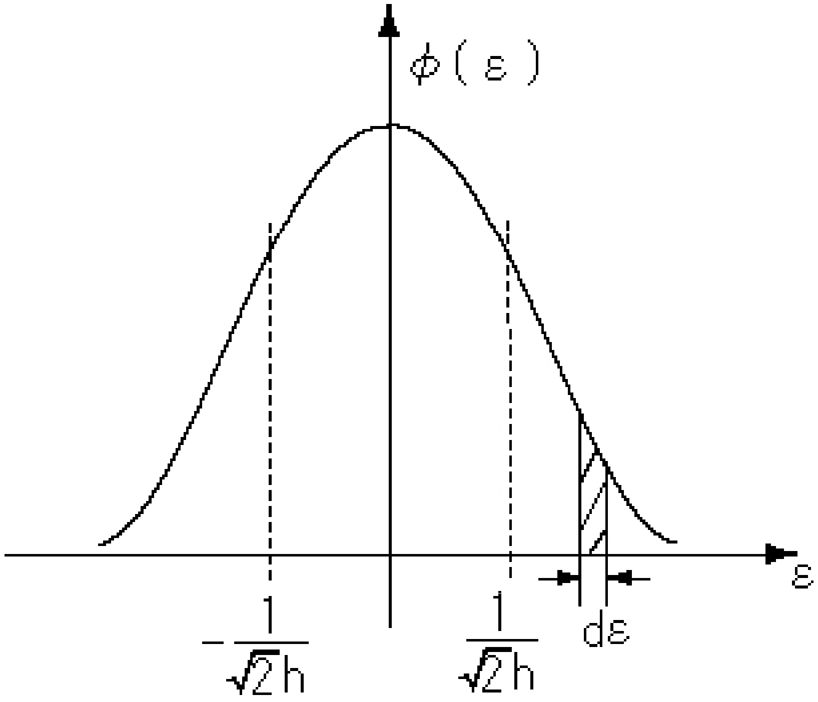
演習問題8．1

ホイーストンブリッジを用いて導線の比抵抗ρを求める。導線の長さをL、半径をr＝d/2（d：直径）、ブリッジで測定した抵抗をRとすると、

$$R = \rho \frac{L}{\pi r^2} \quad \text{であるから、} \quad \rho = \frac{\pi r^2 R}{L} [\mathrm{ohm} \cdot \mathrm{cm}]$$

となる。$\left| \frac{\Delta\rho}{\rho} \right|$ を導き、測定誤差に対してどのパラメータの影響が一番大きいか、考察しなさい。

ガウスの誤差曲線



$\phi(\varepsilon)$　εでの誤差の確率密度

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\varepsilon)d\varepsilon = 1$$

$$\phi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2} \qquad (h:\text{定数})$$

をガウスの誤差曲線という。特に h=1/√2の場合を正規分布とよぶ。

平均誤差:

$$\mu = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon\phi(\varepsilon)d\varepsilon}{\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\varepsilon)d\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\pi}h}$$

標準誤差

$$\sigma^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^2\phi(\varepsilon)d\varepsilon}{\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\varepsilon)d\varepsilon},$$

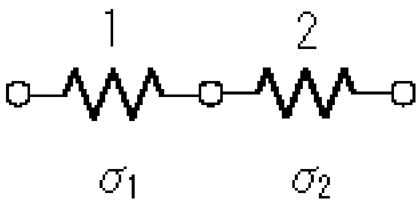
標準偏差

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}h}$$

$\pm\sigma$内に　68.26%
$\pm 2\sigma$内に　95.44%
$\pm 3\sigma$内に　99.74%　・・
殆んどが含まれてしまう。

演習問題8．2

1kΩの抵抗が箱の中に入っている。抵抗値ばらつき (値が一定ではなく個々に少しづつ違っている事) の標準偏差σは100Ωである。この抵抗を5本直列に接続した場合、抵抗値は5kΩからどの位ばらつくと考えられますか？



例：2本の場合

$$\sigma_T{}^2 = \sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 = 2\sigma_I{}^2$$

ただし、$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_I$　とする。

$$\therefore \quad \sigma_T = \sqrt{2}\sigma_I$$

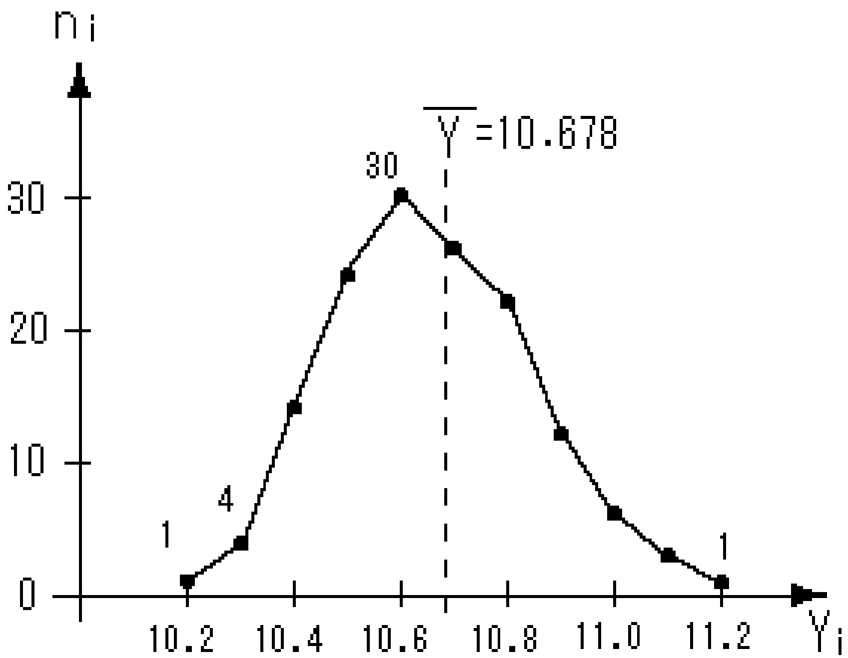
実際にσを計算する！

Nが有限の場合は、 σ^2を $\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} n_i\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$ で計算。

$$= \frac{1}{138-1}[1\times(10.20-10.678)^2 + 4\times(10.30-10.678)^2 + \cdots$$

$$+30\times(10.60-10.678)^2 + \cdots$$

$$+1\times(11.20-10.678)^2] = 0.0369$$



138回の測定結果

したがって、$\sigma = \sqrt{0.0369} = 0.192$

データ処理 (平均法)

残差の代数和を0に設定して諸係数を求める。

測定毎に残差方程式を羅列し、未知数nと等しい数のグループに分ける。

残差方程式のグループ：

$$\mathrm{I.}\left\{\begin{array}{c} v_1 = f\left(x_1 : a, b, c, \cdots\right) - y_1 \\ v_2 = f\left(x_2 : a, b, c, \cdots\right) - y_2 \\ \cdots\cdot \end{array}\right\}$$

$$\mathrm{II.}\left\{\begin{array}{c} v_3 = f\left(x_3 : a, b, c, \cdots\right) - y_3 \\ v_4 = f\left(x_4 : a, b, c, \cdots\right) - y_4 \\ \cdots\cdot \end{array}\right\}$$

$$\mathrm{n.}\left\{\begin{array}{c} v_5 = f\left(x_5 : a, b, c, \cdots\right) - y_5 \\ v_6 = f\left(x_6 : a, b, c, \cdots\right) - y_6 \\ \cdots\cdot \end{array}\right\}$$

グループ毎に加え合わせ、グループ毎に残差を0と置く。すなわち、

1) Iの組：$v_1 + v_2 + \cdots = 0$

2) IIの組：$v_3 + v_4 + \cdots = 0$

3) nの組：$v_5 + v_6 + \cdots = 0$

これらの連立方程式をとく。

平均法の例

x	4	6	8	9
M	5.0	8.0	10.0	12.0

$b + ax = M \cdots$ 測定方程式（観測方程式）

$$\mathrm{I.}\begin{Bmatrix} v_1 = b + 4a - 5 \\ v_2 = b + 6a - 8 \end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{II.}\begin{Bmatrix} v_3 = b + 8a - 10 \\ v_4 = b + 9a - 12 \end{Bmatrix}$$

1) Iの組：$v_1 + v_2 + \cdots = 0 \longrightarrow 2b + 10a = 13$

2) IIの組：$v_3 + v_4 + \cdots = 0 \longrightarrow 2b + 17a = 22$

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 2 & 17 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 13 \\ 22 \end{bmatrix} = \frac{1}{34 - 20} \begin{bmatrix} 17 & -10 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0714 \\ 1.29 \end{bmatrix}$$