電子計測　第5回目　講義資料

杉本　泰博

演習問題５．１

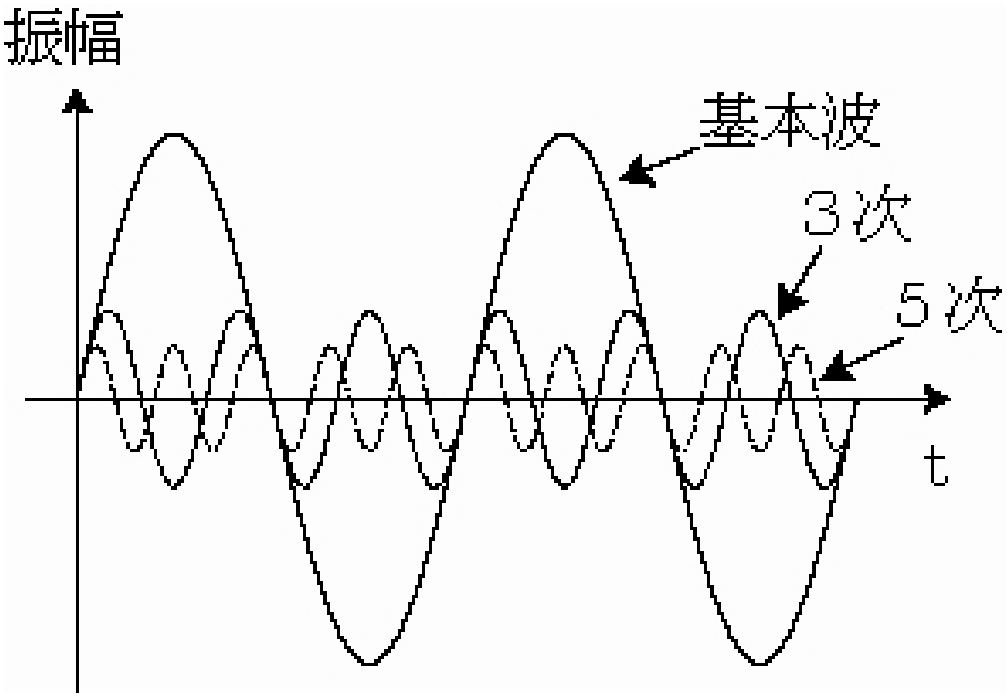
信号 (正弦波) を用いて“１０１１”などの情報を伝える場合、どんな形で情報を載せれば良いと思いますか、3つあげて説明しなさい。

演習問題5．2

　信号（アナログ）をディジタルデータに変換したのだが、もともとアナログ信号に含まれていた振幅、周波数、位相の情報を、ディジタルデータの何処にどのような形で含ませれば良いのだろうか、考えなさい。

演習問題5．3 (任意の入力信号波形は周波数成分の集まりで表現出来る)

図のように、基本波、第3次高調波、および第5次高調波を重ねた。合成波形 (全部を足し合わせた) はどのようなものとなるであろうか、描きなさい。



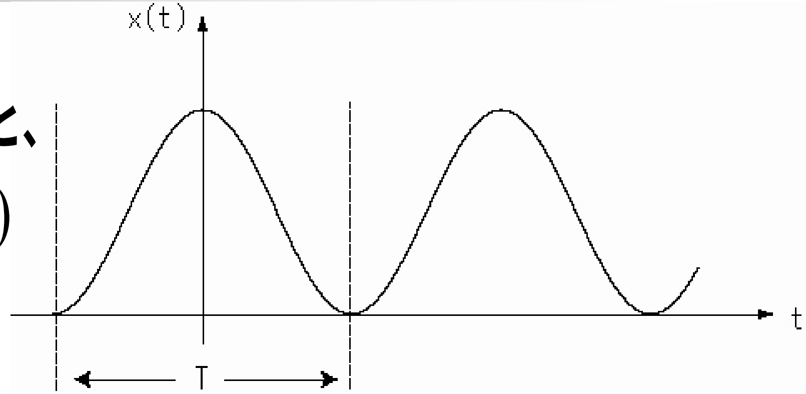
フーリエ級数

1. 周期信号をフーリエ級数によって表現すると、

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n f_0 t\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos 2\pi n f_0 t \cdot dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin 2\pi n f_0 t \cdot dt$$



但し、f0: 基本周波数 (Hz)

T: 信号周期

$$f_0 = \frac{1}{T} \quad , \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$

2. 別の表現法

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}\cos\left(2\pi n f_0 t + \theta_n\right)$$

但し、$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$

複素フーリエ級数

3. 更に別の表現法 (複素表現)

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{j2\pi nf_0t}+e^{-j2\pi nf_0t}}{2}+b_n\frac{e^{j2\pi nf_0t}-e^{-j2\pi nf_0t}}{2j}\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-jb_n}{2}e^{j2\pi nf_0t}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+jb_n}{2}e^{-j2\pi nf_0t}$$

$$c_0=\frac{a_0}{2},\quad c_n=\frac{a_n-jb_n}{2},\quad c_{-n}=\frac{a_n+jb_n}{2}$$ と置けば、

$$=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_ne^{j2\pi nf_0t}+c_{-n}e^{j2\pi(-n)f_0t}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{j2\pi nf_0t}$$

ここで、$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{-j2\pi nf_0t}dt$ 係数Cnが各成分の大きさを表す。

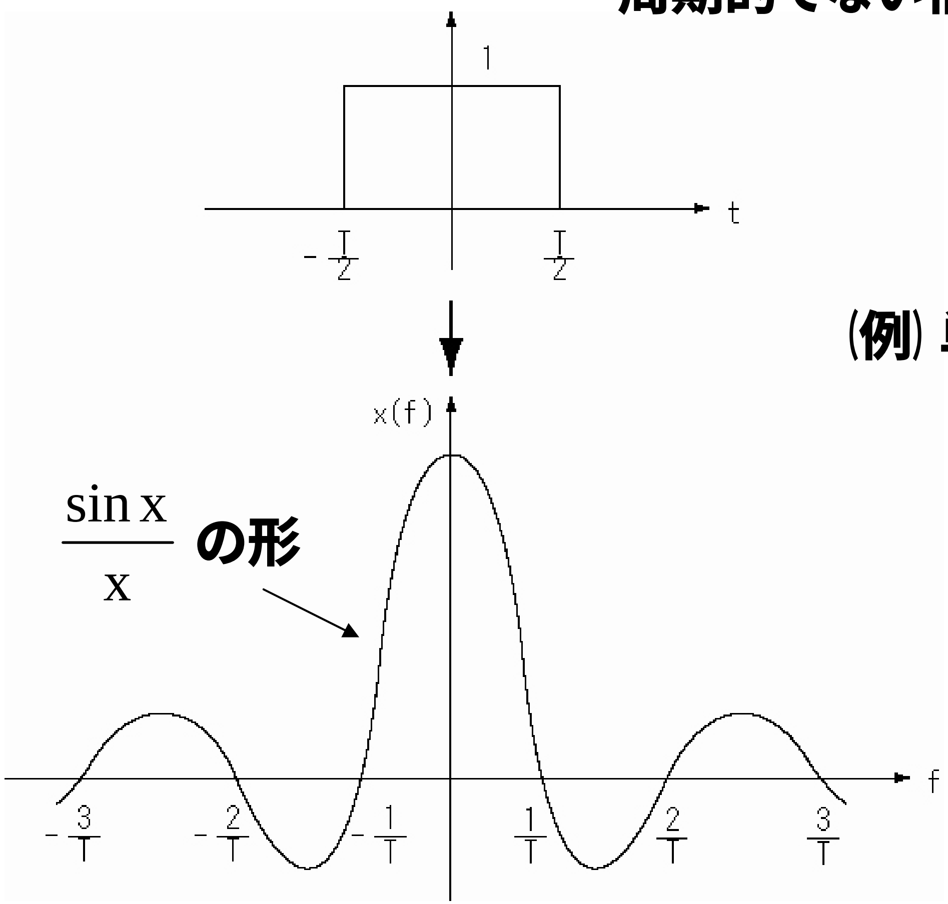
「解析概論」の教科書“応用解析学入門”pp.146-147参照の事。

フーリエ変換

周期的でない信号も周波数領域に表すことが出来る。

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

周波数領域表現　　**時間領域表現**



単発パルスのスペクトラム

(例) 単一パルス波

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{-j2\pi ft}dt=\left.\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f}\right|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

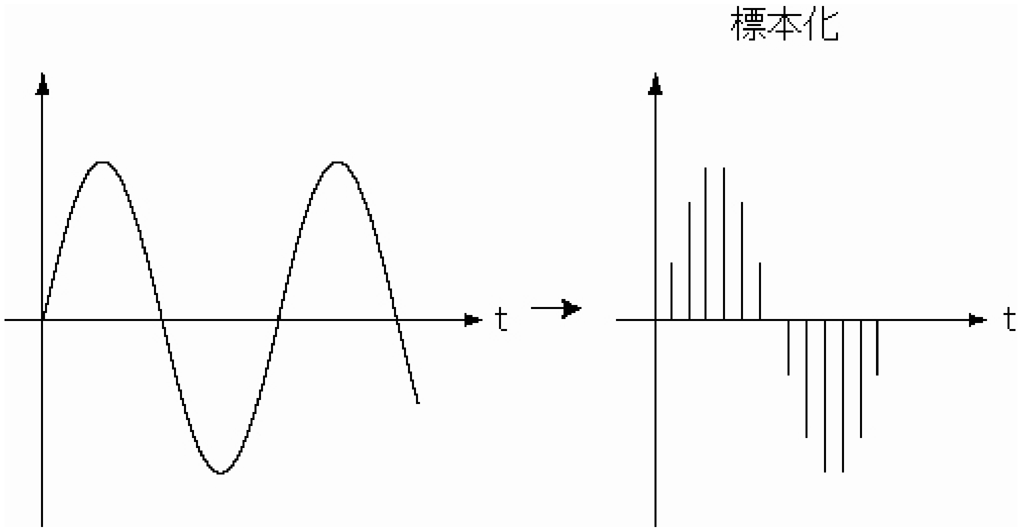
$$=\frac{e^{j2\pi f\frac{T}{2}}-e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}}{j2\pi f}=T\frac{\sin\left\{2\pi f\left(\frac{T}{2}\right)\right\}}{2\pi f\left(\frac{T}{2}\right)}$$

離散フーリエ変換

標本化された時間領域信号を標本化された周波数領域の形に変換する。

フーリエ級数が基本 $C_n = \frac{1}{T'}\int_{-\frac{T'}{2}}^{\frac{T'}{2}} x(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt$

T'−＞t_p，　n−＞kと書き替えると、$C_k = \frac{1}{t_p}\int_{-\frac{t_p}{2}}^{\frac{t_p}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$



フーリエ級数を標本化波形に適用。

$x(t) -> x(n)$

積分の代わりに離散値の総和を取ったものにサンプル間隔Tを掛けたもので代用すると、

$$C_k = \frac{T}{t_p}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi k f_0 t},\quad \text{ただし} n = 0 \sim N-1$$

離散フーリエ変換2

$f_0 -> F$と書き改める

DFTは複素フーリエ級数の係数をN倍したものとして定義

$$X(kF) = N \times C_k = \frac{NT}{t_p} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kFnT} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kFnT}$$

$$t_p = N(\text{サンプル数}) \times T(\text{サンプル時間})$$

$$\frac{1}{F} = NT$$

N:サンプル数

F:周波数領域でのサンプル間隔

T:時間領域でのサンプル間隔

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k \frac{1}{NT} nT} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right) nk}$$

K番目　$\frac{1}{NT}$　**N番目**

離散フーリエ変換3

$W_N = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$とすると、離散フーリエ変換は、 $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$

離散フーリエ逆変換は、 $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$

ここで、 $x(n) = \mathrm{Re}[x(n)] + j\,\mathrm{Im}[x(n)]$

$$W_N^{nk} = \mathrm{Re}\left[W_N^{nk}\right] + j\,\mathrm{Im}\left[W_N^{nk}\right]$$ **とすれば、**

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \left(\mathrm{Re}[x(n)]\mathrm{Re}\left[W_N^{nk}\right] - \mathrm{Im}[x(n)]\mathrm{Im}\left[W_N^{nk}\right] \right) + j\left(\mathrm{Re}[x(n)]\mathrm{Im}\left[W_N^{nk}\right] + \mathrm{Im}[x(n)]\mathrm{Re}\left[W_N^{nk}\right] \right) \right\}$$

$$k = 0, 1, \ldots\ldots, N-1$$

各 k に対して 4N 回 (一つのnで4回だから) の乗算が必要。
全部で 4N² 回の乗算が必要と言う事に！

N=1,000 $4N^2$=400**万回**
N=100,000 $4N^2$=400**億回**